

УДК 536.25

Ламинарная естественная конвекция газа в замкнутой квадратной области*

С. Г. Черкасов, И. В. Лаптев, А. В. Ананьев, А. О. Городнов

Исследовательский центр им. М. В. Келдыша (ГНЦ ФГУП «Центр Келдыша»), Москва;
e-mail: an.ol.gorodnov@gmail.com

Поступила в редакцию 28.03.2018

Рассмотрена задача о естественной конвекции газа в замкнутой квадратной области. Для двух различных постановок выяснены условия перехода задачи о конвекции газа в задачу о конвекции в приближении Буссинеска. Проведено сравнение полученных результатов с пределом Буссинеска, установлены условия, при которых приближение Буссинеска дает малую относительную погрешность в определении основных характеристик течения и теплообмена.

Ключевые слова: ламинарная естественная конвекция, гомобаричность, идеальный газ, приближение Буссинеска, приближение малых чисел Маха.

Введение

Для описания переноса тепла в текучих средах часто используются модели, предполагающие несжимаемость среды, что позволяет значительно упростить постановку задачи. Однако использование таких моделей может приводить к заметным погрешностям при описании теплообмена в сжимаемых средах даже при небольших скоростях течения, когда неоднородности плотности порождаются в первую очередь неоднородностями температуры. Поэтому естественным образом возникает вопрос о реальных границах применимости предположения о несжимаемости в случаях, когда пространственные неоднородности плотности не являются пренебрежимо малыми. Для одномерного нестационарного переноса тепла при отсутствии массовых сил этот вопрос изучался в [1–4]. В работах [1–3] в качестве сжимаемой среды рассматривался идеальный (в термодинамическом смысле) газ, в работе [4] рассматривалась среда с произвольным уравнением состояния. Для описания процессов использовались уравнения энергии и неразрывности, при этом предполагалась справедливость приближения гомобаричности [5, 6], в рамках которого дав-

ление полагается однородным по пространству в уравнениях энергии и состояния.

При наличии массовых сил в неоднородно прогретой среде возникает естественная конвекция. При этом перепады температуры и, следовательно, плотности могут быть весьма велики, как, например, в газовой «подушке» баков с жидким водородом [7]. Одним из наиболее распространенных подходов при решении задач естественной конвекции является приближение Буссинеска [8], в рамках которого пренебрегают сжимаемостью среды везде, кроме члена, выражающего массовую силу в уравнениях движения. На основе данного подхода было получено большое количество важных результатов и разработаны эффективные методы численного моделирования конвекции [9]. Асимптотический анализ границ применимости данной модели проводился в [5, 10]. В работе [11] было показано, что сжимаемость привносит сильные качественные отличия в картину течения в случае нестационарной конвекции, которые принципиально не разрешаются в рамках приближения Буссинеска. В работе [12] численным моделированием решалась задача о конвекции воздуха в прямоугольной области при наличии значительного перепада температур между вертикальными стенками. В работе приведен подробный анализ зависимости характеристик течения и теплооб-

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 16–08–00247-А).

мена от характерного температурного перепада, интенсивности конвекции и соотношения сторон области. В работе [13] решена задача о свободно-конвективном пограничном слое на вертикальной пластине, полученные результаты позволили точно оценить погрешность решений в приближении Буссинеска для данной постановки.

В рамках настоящей работы рассматривается задача о стационарной конвекции газа в плоской квадратной области с изотермическими вертикальными и теплоизолированными горизонтальными стенками (рис. 1). В этой постановке, аналогично [13], изучается вопрос о погрешности результатов, связанных с применением приближения Буссинеска.

Постановка задачи

Рассмотрим стационарную ламинарную естественную конвекцию в плоской квадратной области между изотермическими вертикальными и теплоизолированными горизонтальными стенками (рис. 1). Область заполнена идеальным газом с линейной зависимостью коэффициентов теплопроводности и вязкости от температуры (это соответствует важному для практики случаю паровой «подушки» в баках с жидким водородом [14]).

Для описания конвекции будем использовать модель, основанную на уравнениях Навье–Стокса в приближении гомобаричности [15]. Основной особенностью приближения гомобаричности является представление давления в виде суммы однородной по пространству составляющей P (термодинамическое давление) и учитывающей пространственные неоднородности динамической составляющей p_D , причем предполагается, что $|p_D| \ll P$, и по этой причине в уравнение состояния и уравнение энергии подставляются значения не полного, а термодинамического давления. Также пренебрегают вязкой диссипацией в уравнении энергии [16]. Тогда основные уравнения и граничные условия к ним можно записать в виде:

$$\frac{\partial(\rho U)}{\partial X} + \frac{\partial(\rho W)}{\partial Y} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho U U)}{\partial X} + \frac{\partial(\rho U W)}{\partial Y} = -\frac{\partial p_D}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X} \left[\mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial U}{\partial X} - \frac{2}{3} \frac{\partial W}{\partial Y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial Y} \left[\mu \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial W}{\partial X} \right) \right]; \quad (2)$$

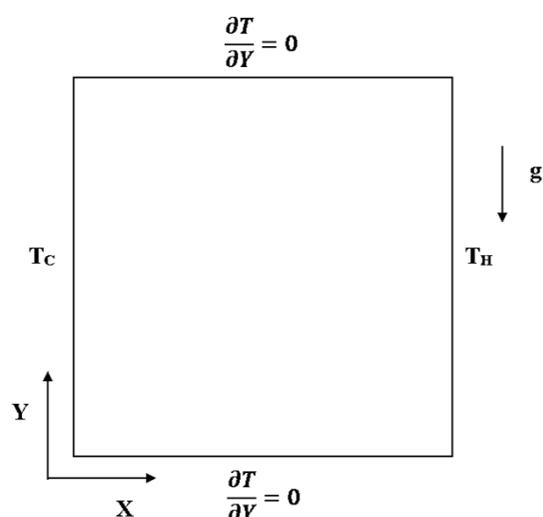


Рис. 1. Схема рассматриваемой задачи

$$\frac{\partial(\rho U W)}{\partial X} + \frac{\partial(\rho W W)}{\partial Y} = -\frac{\partial p_D}{\partial Y} + \frac{\partial}{\partial Y} \left[\mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial W}{\partial Y} - \frac{2}{3} \frac{\partial U}{\partial X} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial X} \left[\mu \left(\frac{\partial W}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \right] - \rho g; \quad (3)$$

$$c_p \left(\frac{\partial(\rho U T)}{\partial X} + \frac{\partial(\rho W T)}{\partial Y} \right) = \frac{\partial}{\partial X} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial Y} \right); \quad (4)$$

$$P = \rho R T; \quad (5)$$

$$\frac{\lambda}{\lambda_p} = \frac{T}{T_p}; \quad (6)$$

$$\frac{\mu}{\mu_p} = \frac{T}{T_p}. \quad (7)$$

Значения реперных параметров в (6) и (7) берутся следующими: $T_p = 80$ К, $\lambda_p = 0.0568$ Вт/(м·К), $\mu_p = 0.37 \cdot 10^{-5}$ Н·с/м².

$$T(0, Y) = T_c, T(L, Y) = T_h, \frac{\partial T}{\partial Y}(X, 0) = \frac{\partial T}{\partial Y}(X, L) = 0; \quad (8)$$

$$U(0, Y) = U(L, Y) = U(X, 0) = U(X, L) = 0; \quad (9)$$

$$W(0, Y) = W(L, Y) = W(X, 0) = W(X, L) = 0.$$

Система (1)–(9) описывает стационарную естественную конвекцию в сжимаемой среде, однако в представленном виде данные уравнения не очень удобны для дальнейшего анализа.

Асимптотический анализ задачи

Целесообразно привести общую систему (1)–(9) к виду, характерному для естественной конвекции. Для этого рассмотрим покоящийся газ

с некоторой произвольной однородной температурой T_0 , плотностью ρ_0 , термодинамическим давлением P и динамическим давлением p_{D0} . Тогда:

$$P = \rho_0 R T_0; \quad (10)$$

$$\frac{\partial p_{D0}}{\partial Y} = -\rho_0 g, \quad \frac{\partial p_{D0}}{\partial X} = 0. \quad (11)$$

Вернемся теперь к задаче конвекции. Представим динамическое давление в виде:

$$p_D = p_{D0} + p'. \quad (12)$$

В качестве масштабов давления и плотности выберем некоторые величины P_* и ρ_* , такие что:

$$P_* = \rho_* R T_0. \quad (13)$$

Введем следующие безразмерные переменные:

$$x = \frac{X}{L}, \quad y = \frac{Y}{L}, \quad \tilde{P} = \frac{P}{P_*}, \quad \tilde{T} = \frac{T}{T_0}, \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_*}, \quad \tilde{\mu} = \frac{\mu(T)}{\mu_0}, \quad (14)$$

$$\mu_0 = \mu(T_0), \quad \tilde{\lambda} = \frac{\lambda(T)}{\lambda_0}, \quad \lambda_0 = \lambda(T_0),$$

$$u = \frac{L}{a_0} U, \quad w = \frac{L}{a_0} W, \quad \tilde{p}' = \frac{L^2}{\rho_* a_0^2} p', \quad a_0 = \frac{\lambda_0}{\rho_* c_p}. \quad (15)$$

Введем также безразмерную избыточную температуру θ по формуле:

$$\theta = \frac{T - T_0}{\Delta T}, \quad \Delta T = T_H - T_C. \quad (16)$$

Тогда:

$$\tilde{T} = 1 + A\theta, \quad \tilde{\rho} = \frac{\tilde{P}}{1 + A\theta}, \quad A = \frac{\Delta T}{T_0}. \quad (17)$$

Как отмечалось выше, температура T_0 выбирается произвольно. Чтобы охарактеризовать относительное расположение точки T_0 на отрезке от T_C до T_H , удобно ввести координату ξ по формуле:

$$\xi = \frac{T_0 - T_C}{\Delta T}. \quad (18)$$

Легко убедиться, что $\xi = 0$, если в качестве температуры T_0 берется температура холодной стенки T_C ; $\xi = 1$ при $T_0 = T_H$ и $\xi = 1/2$, если в качестве температуры T_0 берется средняя температура $(T_C + T_H)/2$.

Обозначим через V и M объем области и массу газа в ней. Введем среднюю плотность:

$$\rho_V = \frac{1}{V} \int_V \rho dV. \quad (19)$$

В безразмерном виде:

$$\tilde{\rho}_V = \int_V \tilde{\rho} d\tilde{V}. \quad (20)$$

Используя введенные переменные и линейную зависимость коэффициентов вязкости и теплопроводности от температуры, можно привести задачу к следующему безразмерному виду:

$$\frac{\partial(\tilde{\rho}u)}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{\rho}w)}{\partial y} = 0; \quad (21)$$

$$\frac{\partial(\tilde{\rho}uw)}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{\rho}uw)}{\partial y} = -\frac{\partial p'}{\partial x} + \text{Pr}_0 \frac{\partial}{\partial x} \left[\tilde{\mu} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \text{Pr}_0 \frac{\partial}{\partial y} \left[\tilde{\mu} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]; \quad (22)$$

$$\frac{\partial(\tilde{\rho}uw)}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{\rho}ww)}{\partial y} = -\frac{\partial p'}{\partial y} + \text{Pr}_0 \frac{\partial}{\partial y} \left[\tilde{\mu} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] + \text{Pr}_0 \frac{\partial}{\partial y} \left[\tilde{\mu} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\text{Ra}_0 \text{Pr}_0}{\tilde{P}(1 + A\theta)} \theta; \quad (23)$$

$$\frac{\partial(\tilde{\rho}u\theta)}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{\rho}w\theta)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\tilde{\lambda} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\tilde{\lambda} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right); \quad (24)$$

$$\tilde{P} = \tilde{\rho}(1 + A\theta); \quad (25)$$

$$\tilde{\lambda} = 1 + \theta \cdot A; \quad (26)$$

$$\tilde{\mu} = 1 + \theta \cdot A; \quad (27)$$

$$\theta(0, y) = -\xi, \quad \theta(1, y) = 1 - \xi, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial \theta}{\partial y}(x, 1) = 0; \quad (28)$$

$$u(0, y) = u(1, y) = u(x, 0) = u(x, 1) = 0; \quad (29)$$

$$w(0, y) = w(1, y) = w(x, 0) = w(x, 1) = 0.$$

Здесь числа Рэлея, Прандтля и коэффициент теплового расширения определены следующим образом:

$$\text{Ra}_0 = \frac{g \beta_0 \Delta T L^3 \rho_0^2 c_p}{\lambda_0 \mu_0}; \quad \text{Pr}_0 = \frac{\mu_0 c_p}{\lambda_0}; \quad \beta_0 = \frac{1}{T_0}. \quad (30)$$

Систему (21)–(30) будем называть системой уравнений конвекции в приближении гомобаричности. Легко убедиться, что для замыкания задачи необходимо задать еще одно дополнительное условие. В качестве такого условия можно, например, задать термодинамическое давление P (первая постановка задачи) или среднюю плотность ρ_V (вторая постановка задачи). В первой постановке в качестве масштаба давления P_* естественно принять это же давление P . Тогда

$P=1$, а реперная плотность однозначно определяется из уравнения (5).

В случае второй постановки за реперную плотность ρ_* естественно принять величину ρ_γ . При этом давление P должно каким-то образом вычисляться из условия:

$$\int_{\tilde{V}} \tilde{\rho} d\tilde{V} = 1. \quad (31)$$

Рассмотрим последовательность стационарных режимов конвекции для случая, когда температурный перепад на стенках стягивается к температуре T_0 таким образом, что параметр ξ остается постоянным. Очевидно, что данный случай означает переход к пределу $A \rightarrow 0$.

Легко убедиться, что при $A \rightarrow 0$ задача (21)–(30) в обоих случаях асимптотически переходит в следующую задачу Буссинеска:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uw)}{\partial y} &= -\frac{\partial p'}{\partial x} + \text{Pr}_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right); \\ \frac{\partial(wu)}{\partial x} + \frac{\partial(ww)}{\partial y} &= \\ &= -\frac{\partial p'}{\partial y} + \text{Pr}_0 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \text{Pr}_0 \text{Ra}_0 \theta; \\ \frac{\partial(u\theta)}{\partial x} + \frac{\partial(w\theta)}{\partial y} &= \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}; \end{aligned} \quad (32)$$

$$\theta(0, y) = 0, \theta(1, y) = 1, \frac{\partial \theta}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial \theta}{\partial y}(x, 1) = 0; \quad (33)$$

$$\begin{aligned} u(0, y) = u(1, y) = u(x, 0) = u(x, 1) &= 0; \\ w(0, y) = w(1, y) = w(x, 0) = w(x, 1) &= 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Здесь

$$\text{Ra}_0 = \frac{g\beta_0 \Delta T L^3 \rho_0^2 c_p}{\lambda_0 \mu_0}; \text{Pr} = \frac{\mu_0 c_p}{\lambda_0}; \beta_0 = \frac{1}{T_0}. \quad (35)$$

Наибольший интерес представляет задача с заданной средней плотностью, так как в данном случае возникает дополнительная трудность определения давления из условия (31).

Численное моделирование задачи с заданной плотностью

Решение стационарной задачи искалось методом установления, причем дискретизация прово-

дилась методом конечных объемов на шахматной прямоугольной сетке. Более подробное описание алгоритма итерационного процесса, применяемого для решения нестационарных уравнений, дано в работе [16]. Приведем его краткое описание:

1. Задаются начальные условия для решения нестационарной системы.

2. Начало итерационного цикла для определения $n+1$ значений искомых величин. Задаются значения всех величин на m итерации с предыдущего временного шага.

3. Находятся значения температуры на $m+1$ итерации из разностного аналога уравнения энергии, записанного в следующей форме:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma} \frac{\tilde{\rho}_{ij}^m \theta_{ij}^{m+1} - \tilde{\rho}_{ij}^n \theta_{ij}^n}{\tau} \Delta x_i^U \Delta y_j^V + \left[(\tilde{\rho} u \theta)_{i+\frac{1}{2}j}^n - (\tilde{\rho} u \theta)_{i-\frac{1}{2}j}^n \right] \Delta y_j^V + \\ + \left[(\tilde{\rho} v \theta)_{ij+\frac{1}{2}}^n - (\tilde{\rho} v \theta)_{ij-\frac{1}{2}}^n \right] \Delta x_i^U = \\ = \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2}j}^n - \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{i-\frac{1}{2}j}^n \right] \Delta y_j^V + \\ + \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{ij+\frac{1}{2}}^n - \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{ij-\frac{1}{2}}^n \right] \Delta x_i^U. \end{aligned} \quad (36)$$

4. Находится новое значение термодинамической составляющей давления из модифицированного аналога уравнения (31):

$$\tilde{P} = \frac{1}{\int_{\tilde{V}} \frac{d\tilde{V}}{1 + A\theta}}. \quad (37)$$

5. Далее находится плотность из уравнения состояния, динамическое давление из разностного уравнения Пуассона для давления, составленного из дискретных форм уравнений для компонент скорости и уравнения неразрывности.

6. Находятся компоненты вектора скорости из уравнения движения.

7. Проверяется условие сходимости итераций:

$$\sum_{i,j} \left| \frac{\theta_{ij}^{m+1} - \theta_{ij}^m}{\theta_{ij}^m} \right| < \varepsilon. \quad (38)$$

8. При выполнении условия (38) переходим к расчету следующего временного шага, в противном случае переходим к п. 2, обновив значения величин найденными в ходе проделанного цикла.

Таблица 1. Значения среднего числа Нуссельта для случая $Ra=10^6, A=1.2$ и постоянных свойств среды, рассчитанные на равномерных сетках с различным числом расчетных узлов, по сравнению с данными [17]

Среднее число Нуссельта, Nu	Настоящая работа							Benchmark [17]
	Число расчетных ячеек сетки $N \cdot 10^{-2}$							
	16	64	100	256	400	625	1600	
	9.513	9.02	8.965	8.906	8.872	8.860	8.860	8.860

Основной особенностью данного алгоритма является последовательное приближение дискретного аналога уравнения энергии к неявной форме, что позволяет удовлетворить массовому балансу и балансу энергии с заданной точностью. Уравнения аппроксимировались со вторым порядком точности по пространству и первым по времени, причем для аппроксимации конвективных потоков через грани контрольного объема использовалась схема второго порядка QUICK, а для аппроксимации диффузионных потоков применялась левосторонняя трехточечная схема второго порядка. Используемые аппроксимации сохраняют порядок точности при применении неравномерных сеток. Одной из важнейших характеристик для подобных задач является тепловой поток на изотермических стенках, который характеризуется средним числом Нуссельта:

$$\overline{Nu} = \frac{1}{A} \int_0^1 \tilde{\lambda} \frac{\partial(1+A\theta)}{\partial \tilde{x}} \Big|_{y=0} d\tilde{y}. \quad (39)$$

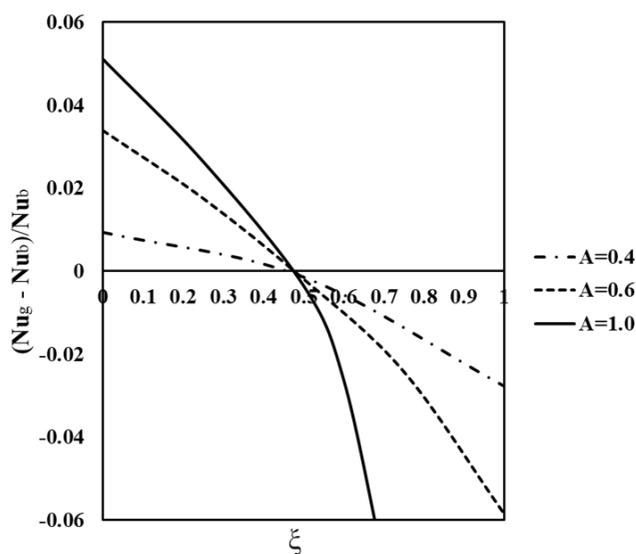


Рис. 2. Относительная погрешность определения \overline{Nu} в пределе Буссинеска по сравнению с расчетами в приближении гомобаричности в зависимости от ξ при различных значениях A и фиксированном $Ra=10^6$

В табл. 1 приведена демонстрация сходимости значения среднего числа Нуссельта при измельчении сетки и сравнение этого значения с полученным в [17], где анализировалась подобная задача с обобщением данных многих других решателей на сетках различной степени детализации.

Как видно из таблицы, уже на сетке размером 200×200 ячеек отклонение по числу Нуссельта от полученного в [17] не превышает 0.2%, поэтому именно данный размер сетки используется в дальнейших расчетах.

Решения для сжимаемой среды сравнивались с результатами, полученными в пределе $A \rightarrow 0$, который в дальнейшем будем называть пределом Буссинеска. Данное сравнение позволит выяснить, к каким отличиям в основных характеристиках течения и теплообмена приводит учет сжимаемости. Рассмотрим влияние выбора реперной температуры T_0 на относительную погрешность определенного в пределе Буссинеска среднего числа Нуссельта по сравнению с данными, полученными для конвекции при больших температурных перепадах (рис. 2).

Отличия динамических характеристик течения рассматривались на примере максимальной скорости в области. На рис. 3 представлена относительная погрешность определения макси-

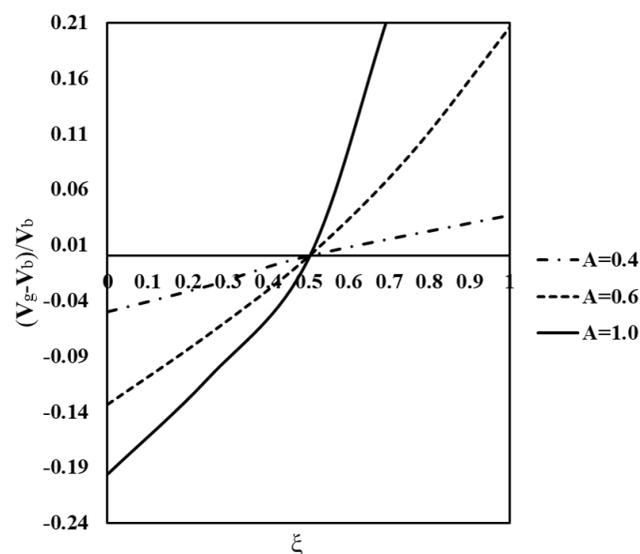


Рис. 3. Относительная погрешность определения максимума скорости в пределе Буссинеска по сравнению с расчетами в приближении гомобаричности в зависимости от ξ при различных значениях A и фиксированном $Ra=10^6$

муна скорости в пределе Буссинеска по сравнению с расчетами в приближении гомобаричности в зависимости от ξ .

Как видно из рис. 2 и 3, при значении $\xi \sim 0.5$ разница между решениями, полученными для значительных A и в пределе Буссинеска, минимальна и слабо зависит от A . Данному значению ξ соответствует некоторая температура T^* :

$$T^* = \frac{T_H + T_C}{2}. \quad (40)$$

Логично предположить, что данная температура слабо отличается от среднемассовой. На рис. 4 представлены значения избыточной среднемассовой температуры, рассчитанные при задаваемой соотношением (40) реперной температуре для различных значений числа Рэлея и параметра A .

Как видно из графика, среднемассовая температура действительно очень близка к температуре T^* даже при больших температурных перепадах.

В табл. 2 и 3 представлены среднее число Нуссельта и величины максимума скорости, рассчитанные для газа при различных значениях параметра A и числа Рэлея Ra , причем за характерную абсолютную температура выбиралась величина T^* . Как можно заметить из табл. 2 и 3, среднее число Нуссельта и максимум скорости в газе слабо зависят от A и хорошо согласуются с решениями, полученными для предела Буссинеска с параметрами, взятыми при температуре T^* , причем это отличие составляет не более нескольких процентов.

Таблица 2. Среднее число Нуссельта на горизонтальных стенках при различных значениях Ra и A

Ra	A				
	0.01	0.4	0.6	0.8	1.2
10^4	2.239	2.238	2.238	2.235	2.227
10^5	4.529	4.532	4.533	4.531	4.524
10^6	8.902	8.918	8.91	8.895	8.82

Таблица 3. Значения максимума модуля скорости U_{\max} в области при различных значениях Ra и A

Ra	A				
	0.01	0.4	0.6	0.8	1.2
10^4	20.32	20.844	21.14	21.441	22.024
10^5	74.411	75.063	75.566	75.9	75.925
10^6	251.52	251.424	251.41	248.003	247.216

На рис. 5 и 6 показаны изотермы и линии тока при различных значениях числа Рэлея и A ,

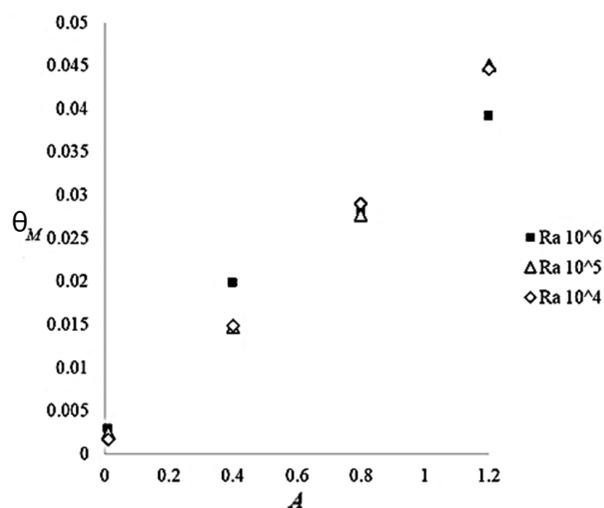


Рис. 4. Величина избыточной среднемассовой температуры при различных значениях Ra и A

причем характерная абсолютная температура $T_0 = T^*$.

Как видно из этих рисунков, в случае значительных температурных перепадов наблюдается деформация течения, приводящая к сжатию пограничного слоя у холодной стенки и утолщению у горячей. В работе [12] также наблюдалась подобная картина течения.

На рис. 7–9 представлены профили вертикальной компоненты скорости при различных значениях числа Рэлея и параметра A в центральном горизонтальном сечении области. Наблюдается деформация профилей скорости, приводящая к смещению влево положения максимума у холодной стенки и смещению другого максимума от горячей стенки при увеличении температурного перепада. Для среды с зависимостью коэффициентов переноса по закону Сазерленда в [12] было получено, что положение максимумов скорости линейно смещается при изменении A и фиксированном числе Рэлея. В работе [18] дается следующее соотношение, полученное в приближении Буссинеска для положения максимума скорости у стенки, под которым понимается расстояние от ближайшей стенки до положения максимума скорости по оси x :

$$\delta_H = \delta_C = \frac{1.22}{Ra^{0.25}}. \quad (41)$$

Поэтому для линейной зависимости коэффициентов переноса будем искать положение максимумов скорости у горячей и холодной стенок с той же, что и в (41), зависимостью от числа Рэлея в следующем виде:

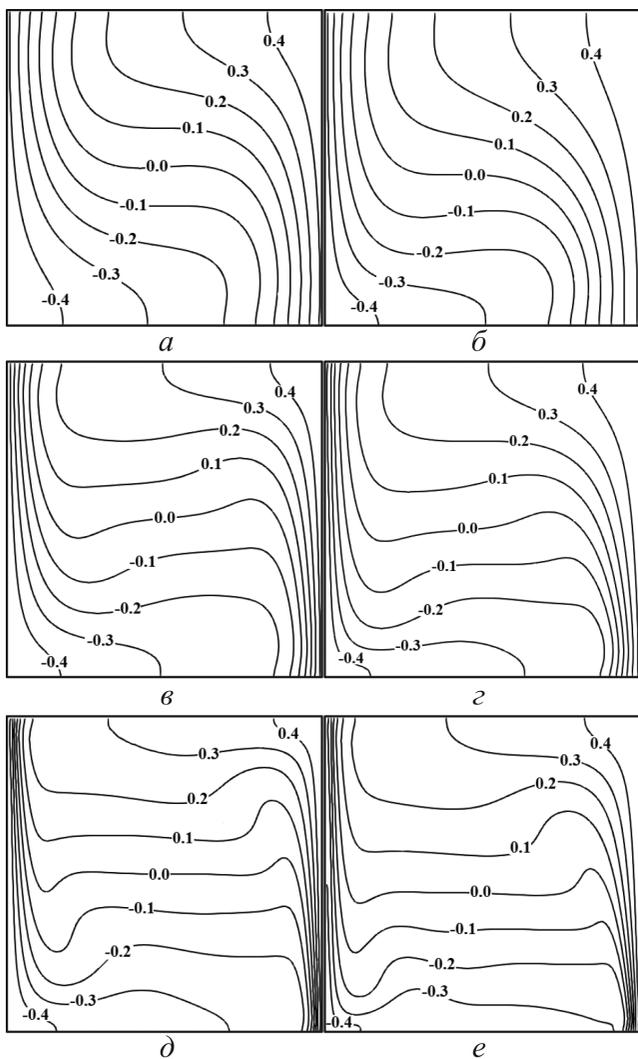


Рис. 5. Изолинии температуры: $Ra=10^4$, $a - A=0.01$, $б - A=1.2$; $Ra=10^5$, $в - A=0.01$, $з - A=1.2$; $Ra=10^6$, $д - A=0.01$, $е - A=1.2$

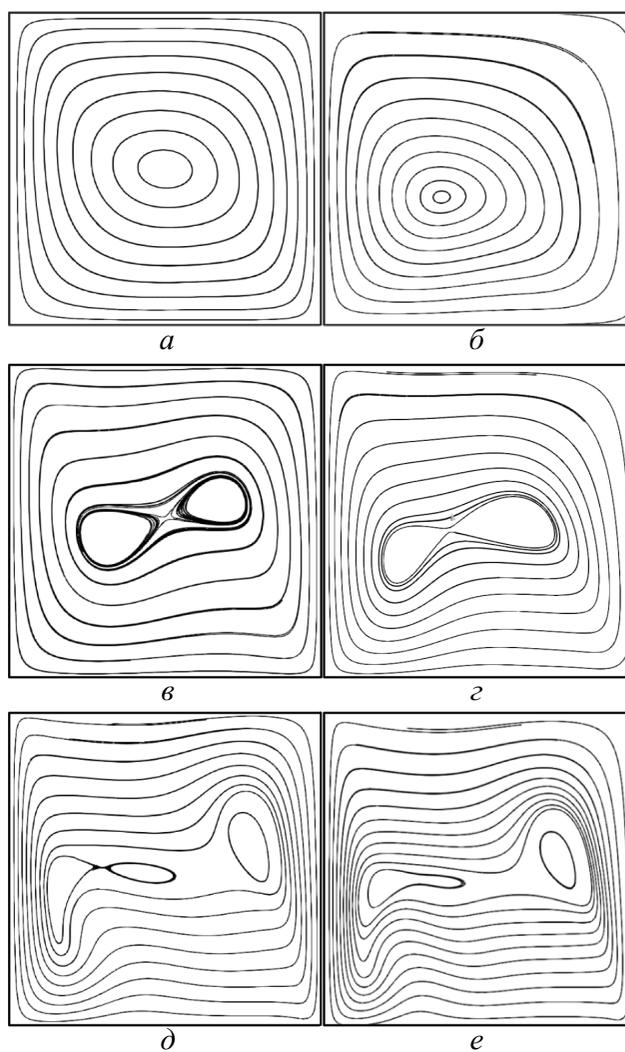


Рис. 6. Линии тока: $Ra=10^4$, $a - A=0.01$, $б - A=1.2$; $Ra=10^5$, $в - A=0.01$, $з - A=1.2$; $Ra=10^6$, $д - A=0.01$, $е - A=1.2$

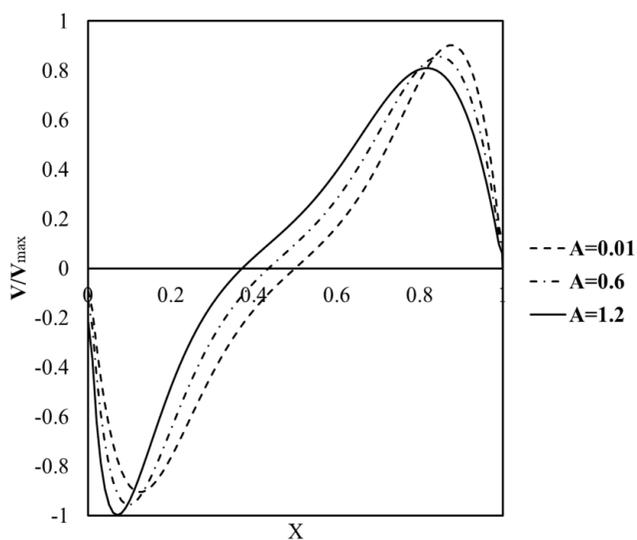


Рис. 7. Профили вертикальной составляющей скорости в центральном горизонтальном сечении, отнесенной к максимуму скорости по профилю, при различных A , $Ra=10^4$

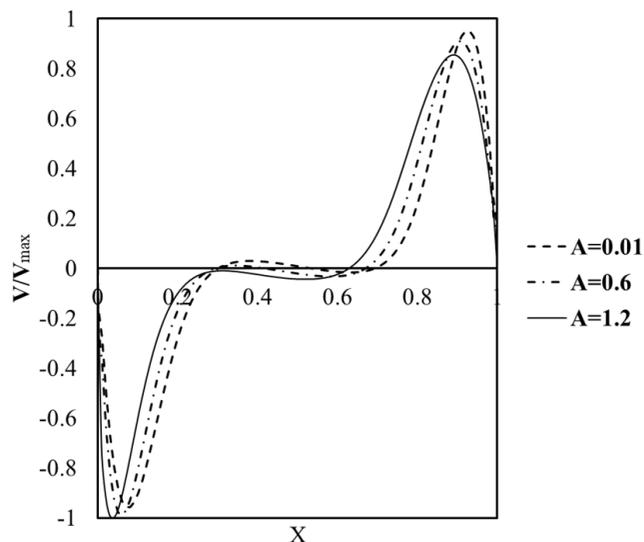


Рис. 8. Профили вертикальной составляющей скорости в центральном горизонтальном сечении, отнесенной к максимуму скорости по профилю, при различных A , $Ra=10^5$

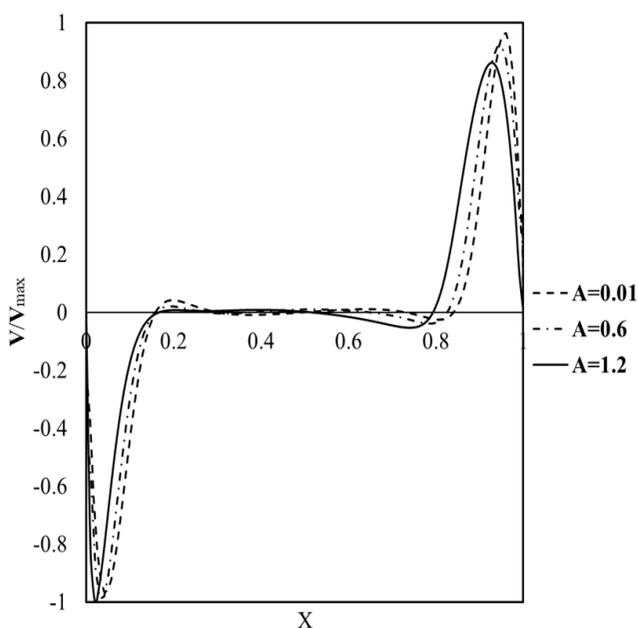


Рис. 9. Профили вертикальной составляющей скорости в центральном горизонтальном сечении, отнесенной к максимуму скорости по профилю, при различных A , $Ra=10^6$

$$\delta_H = \frac{a_1}{Ra^{0.25}}(1 + b_1 A); \quad (42)$$

$$\delta_C = \frac{a_2}{Ra^{0.25}}(1 - b_2 A). \quad (43)$$

Здесь a_1 , b_1 , a_2 и b_2 – неизвестные коэффициенты. Обобщение расчетных данных приводит к выражениям:

$$\delta_H = \frac{1.3}{Ra^{0.25}}(1 + 0.51A); \quad (44)$$

$$\delta_C = \frac{1.3}{Ra^{0.25}}(1 - 0.38A). \quad (45)$$

Из (44) и (45) можно заключить, что при $A \leq 0.5$ погрешность полученных в пределе Буссинеска положений максимумов не превышает 30% по сравнению с результатами, полученными для сжимаемого газа.

Заключение

Проведен асимптотический анализ стационарной задачи о конвекции сжимаемой среды в замкнутой области. Задача была рассмотрена в двух различных постановках, когда известно либо давление, либо средняя плотность в установившемся режиме. Получена форма уравнений конвекции, очевидным образом переходящая в уравнения Буссинеска при $A \rightarrow 0$. Показано, что наилучшим является случай, когда теплофизические харак-

теристики заданы при характерной температуре $T^* = 0.5(T_H + T_C)$, отличие которой от среднемассовой мало даже при больших температурных перепадах. При таком выборе реперной температуры при малых значениях A задача о конвекции в газе очень слабо отличается от задачи о конвекции в приближении Буссинеска, а погрешность в определении максимума скорости и среднего числа Нуссельта при различных значениях характерного температурного перепада не превышала нескольких процентов по сравнению с результатами, полученными в пределе малых относительных температурных перепадов. Приведены картины течения и обобщающие расчетные данные зависимости для положения максимумов скорости у горячей и холодной стенок в центральном горизонтальном сечении области. Установлено, что при значениях характерного относительно температурного перепада $A \leq 0.5$ приближение Буссинеска описывает положение максимумов скорости с погрешностью, меньшей 30% по сравнению с приближением гомобаричности.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

A – безразмерный характерный температурный перепад;
 a – коэффициент теплопроводности;
 c_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении;
 g – ускорение силы тяжести;
 i, j – индексы узлов расчетной сетки;
 L – характерный размер области;
 m – номер итерации в расчетном цикле;
 n – номер шага по времени;
 p_D – динамическое давление;
 P – термодинамическое давление;
 V – объем рассматриваемой полости;
 X – горизонтальная координата;
 Y – вертикальная координата;
 T – абсолютная температура;
 U – X -компонента скорости;
 W – Y -компонента скорости;
 Nu – число Нуссельта;
 Pr – число Прандтля;
 Ra – число Рэлея;
 β – коэффициент теплового расширения;
 δ – расстояние от максимума скорости в центральном горизонтальном сечении до ближайшей вертикальной стенки;
 ε – абсолютная величина относительной ошибки сходимости поля температуры в итерационном процессе;
 λ – коэффициент теплопроводности;
 μ – коэффициент динамической вязкости;
 ρ – плотность;
 θ – безразмерный относительный температурный перепад;
 $\Delta x_i^U, \Delta x_i^V$ – шаги сетки по оси x между узлами для горизонтальной и вертикальной составляющих скорости;
 $\Delta y_j^U, \Delta y_j^V$ – шаги сетки по оси y между узлами для горизонтальной и вертикальной составляющих скорости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Агафонов Д. В., Черкасов С. Г.** Влияние переменности плотности на распространение тепла в газе // Теплофизика высоких температур. 2002. Т. 40. № 4. С. 617–622.
2. **Черкасов С. Г., Черкасова А. С.** Одномерный теплоперенос в газе с учетом эффектов, обусловленных тепловым расширением // Известия РАН. Энергетика. 2007. № 1. С. 47–54.
3. **Черкасов С. Г., Миронов В. В., Тлевцежев В. В.** Теоретическое исследование нестационарного теплообмена в замкнутом газовом объеме при отсутствии массовых сил // Известия РАН. Энергетика. 2012. № 4. С. 139–150.
4. **Черкасов С. Г., Миронов В. В.** Об условиях применимости уравнения теплопроводности для описания одномерного нестационарного теплопереноса в сжимаемой текучей среде // Известия РАН. Энергетика. 2012. Т. 4. С. 134–138.
5. **Лапин Ю. В., Стрелец М. Х.** Внутренние течения газовых смесей. М.: Наука, 1989. 368 с.
6. **Черкасов С. Г.** О некоторых особенностях описания тепловых и динамических процессов в газах в приближении гомобаричности // Теплофизика высоких температур. 2010. Т. 48. № 3. С. 444–448.
7. **Belyaev A. Yn., Ivanov A. V., Egorov S. D., Voyteshok V. S., Mironov V. M.** Pathways to solve the problem of cryogenic rocket propellant long storage in space // Proc. Int. Aerospace Congress. Moscow, Russia. August 15–19. 1994. V.1. P. 558–562.
8. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теоретическая физика. Том VI. Гидродинамика, М.: Наука, 1986. 736 с.
9. **Полежаев В. И., Бунэ А. В., Везузуб Н. А., Глушко Г. С., Грязнов В. Л., Дубовик К. Г., Никитин С. А., Простомолотов А. И.** Математическое моделирование конвективного тепло-массообмена на основе уравнений Навье–Стокса. М.: Наука, 1987. 272 с.
10. **Gray D. D., Giorgini A.** The validity of the Boussinesq approximation for liquids and gases // Int. J. Heat Mass Transfer. 1976. V. 19. P. 545–551.
11. **Никулин Д. А., Стрелец М. Х.** Численное моделирование нестационарной естественной конвекции однородного сжимаемого газа в замкнутой неадиабатической области // ТВТ. 1984. Т. 22. С. 906–912.
12. **Chenoweth D. R., Paolucci S.** Natural convection in an enclosed vertical air layer with large horizontal temperature difference // J. Fluid Mech. 1986. V. 169. P. 173–210.
13. **Черкасов С. Г., Лаптев И. В.** Упрощенный расчет ламинарного свободно-конвективного слоя в газе // Тепловые процессы в технике. 2017. Т. 9. № 4. С. 146–153.
14. **Варгафтик Н. Б.** Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Наука, 1972. 720 с.
15. **Городнов А. О., Лаптев И. В., Черкасов С. Г.** Моделирование естественной конвекции сжимаемого газа в замкнутой области. Сборник тезисов юбилейной конференции Национального комитета РАН по тепло- и массообмену «Фундаментальные и прикладные проблемы теплообмена» и «Проблемы газодинамики и теплообмена в энергетических установках». Том 1. М.: Издательский дом МЭИ, 2017. С. 103–104.
16. **Paolucci S.** On the filtering of sound from the Navier-Stokes equations. Sandia National Laboratories report SAND 82–8257. 1982. 52 с.
17. **Qu'ér'e P. L.** Modelling of natural convection flows with large temperature differences: A benchmark problem for low Mach number solvers. Part 1, reference solutions // ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis. 2005. V. 39. N 3. P. 609–616.
18. **Roux B., Grondin J. C., Bontoux P., Gilly B.** On a high-order accurate method for the numerical study of natural convection in a vertical square cavity // Numerical Heat Transfer. 1978. V. 1. P. 331–349.

Laminar natural convection of gas in closed square cavity

S. G. Cherkasov, I. V. Laptev, A. V. Anan'ev, A. O. Gorodnov

*Keldysh Research Centre, Moscow
e-mail: anatoly.v.ananyev@gmail.com*

The article considers the steady state problem of laminar natural convection of ideal gas with linear dependence between thermal conductivity and viscosity coefficients and temperature in closed square cavity between two vertical walls with large temperature difference and two thermally isolated horizontal walls using homobaricity approximation. It presents the dimensionless form of equations, and analyzes limiting transition of these equations in case of smallness of the characteristic temperature drops. The control volume method was applied for the obtained equations approximation in case of small Mach numbers conditions. Analysis of mesh convergence of the applied numerical method was performed. Comparison of numerical modeling results for such problem with constant gas properties with the well-known data obtained by generalizing the great number of calculations made by various authors on the similar meshes, demonstrated good matching of the results. As a result of numerical modeling the problem was solved in a wide range of the key parameters, such Rayleigh number and characteristic temperature drop. Temperature fields and flow lines for various Rayleigh number values and temperature parameter are shown. The obtained results were compared with Boussinesq limit when temperature drops in the area were small. Conditions of transition to Boussinesq limit and effect of characteristic temperature selecting on this

limiting transition were clarified. The best option for the characteristic temperature selection for describing the heat and mass exchange processes was substantiated. The dependence between thicknesses of near-wall boundary layer and temperature parameter were obtained. Criteria of Boussinesq limit applicability for heat and mass exchange description in case of the above said type of the problems was substantiated.

Keywords: laminar natural convection, homobaricity, ideal gas, Boussinesq approach, low Mach number approach

REFERENCES

1. **Agafonov D.V., Cherkasov S.G.** The effect of the variability of density on the propagation of heat in a gas. *High Temperature*, 2002, vol. 40, no. 4, pp. 617–622.
2. **Cherkasov S.G., Cherkasova A.S.** Odnomernyj teploperenos v gaze s uchetom effektivov, obuslovlennykh teplovym rasshireniem [One-dimensional heat transfer in gases and effects due to thermal expansion]. *Izvestiya RAN. Energetika – Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering*, 2007, no. 1, pp. 47–54. In Russ.
3. **Cherkasov S.G., Mironov V.V., Tlevcejev V.V.** Teoreticheskoe issledovanie nestatsionarnogo teploobmena v zamknutom gazovom ob’eme pri otsutstvii massovykh sil [Theoretical research of non-stationary heat-exchange in closed gas volume at the absence of mass forces]. *Izvestiya RAN. Energetika – Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering*, 2012, no. 4, pp. 139–150. In Russ.
4. **Cherkasov S.G., Mironov V.V.** Ob usloviyakh primenimosti uravneniya teploprovodnosti dlya opisaniya odnomernogo nestatsionarnogo teploperenosa v szhimaemoy tekuchej srede [About conditions of application of thermal conductivity equation for the description of one-dimensional non-stationary heat transfer in compressible fluid medium]. *Izvestiya RAN. Energetika – Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering*, 2012, no. 4, pp. 134–138. In Russ.
5. **Lapin Yu.V., Strelets M.Kh.** *Vnutrennie techeniya gazovykh smesey* [Internal flows of gas mixtures]. Moscow, Nauka, 1989. 368 p. In Russ.
6. **Cherkasov S.G.** Some special features of description of thermal and dynamic processes in gases in the approximation of homobaricity. *High Temperature*, 2010, vol. 48, no. 3, pp. 444–448.
7. **Belyayev A.Yn., Ivanov A.V., Egorov S.D., Voyteshnikov V.S., Mironov V.M.** Pathways to solve the problem of cryogenic rocket propellant long storage in space. *Proc. Int. Aerospace Congress. Moscow, Russia. August 15–19, 1994*, vol. 1, pp. 558–562.
8. **Landau L.D., Lifshitz E.M.** *Fluid mechanics (Course of theoretical physics; v. 6)*. Pergamon Press, 1987. 547 p.
9. **Polezhaev V.I., Buneh A.V., Verezub N.A., Glushko G.S., Gryaznov V.L., Dubovik K.G., Nikitin S.A., Prostomolotov A.I.** *Matematicheskoe modelirovanie konvektivnogo teplo-massoobmena na osnove uravnenij Nav’er-Stoksa* [Mathematical modeling of convective heat-mass transfer on the basis of the Navier–Stokes equations]. Moscow, Nauka, 1987. 272 p. In Russ.
10. **Gray D.D., Giorgini A.** The validity of the Boussinesq approximation for liquids and gases. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 1976, vol. 19, pp. 545–551.
11. **Niculin D.A., Strelets M.Kh.** Numerical modeling of non-steady natural-convection of homogeneous compressible gas in a closed nonadiabatic region. *High Temperature*, 1984, vol. 22, no. 5, pp. 707–713.
12. **Chenoweth D.R., Paolucci S.** Natural convection in an enclosed vertical air layer with large horizontal temperature difference. *J. Fluid Mech.*, 1986, vol. 169, pp. 173–210.
13. **Cherkasov S.G., Laptev I.V.** Uproshhennyj raschet laminarnogo svobodno-konvektivnogo sloya v gaze [Simplified approach for natural convection laminar boundary layer calculation]. *Teplovye protsessy v tekhnike – Thermal processes in engineering*, 2017, vol. 9, no. 4, pp. 146–153. In Russ.
14. **Vargaftik N.B.** *Spravochnik po teplofizicheskim svoystvam gazov i zhidkostej* [Reference book on thermophysical properties of gases and liquids]. Moscow: Nauka, 1972. 720 p. In Russ.
15. **Gorodnov A.O., Laptev I.V., Cherkasov S.G.** Modelirovanie estestvennoj konveksii szhimaemogo gaza v zamknutoj oblasti [Simulation of natural convection of a compressible gas in a closed region]. *Sbornik tezisev yubilejnoj konferentsii Natsional’nogo komiteta RAN po teplo- i massoobmenu «Fundamental’nye prikladnye problem teplo-massoobmena» i «Problem ygazodinamiki i teplomasoobmena v ehnergeticheskikh ustanovkakh» – Extended abstracts of both jubilee conference “Fundamental and applied problems in heat and mass transfer” and “Problems of gas dynamics, heat and mass transfer in power plants”*, Publishing house MPEI, 2017, vol. 1, pp. 103–104. In Russ.
16. **Paolucci S.** *On the filtering of sound from the Navier–Stokes equations*. Sandia National Laboratories report SAND 82–8257, 1982. 52 p.
17. **Qu’er’e P.L.** Modelling of natural convection flows with large temperature differences: A benchmark problem for low Mach number solvers. Part 1, reference solutions. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*. 2005, vol. 39, no. 3, pp. 609–616.
18. **Roux B., Grondin J.C., Bontoux P., Gilly B.** On a high-order accurate method for the numerical study of natural convection in a vertical square cavity. *Numerical Heat Transfer*, 1978, vol. 1, pp. 331–349.